数理解析研究所講究録
939巻 1996年 97-109

Weak*-midpoint-Bocce-dentability and Pettis sets

静岡大学　理　松田　稔 (Minoru Matsuda)

§1. 序. この報告は、先に数理解析研究所講究録 789、861 においてその種々の特徴付けを紹介したペッティス集合 (Pettis set) に関し、最近 [6] で得られた更なる特徴付けを述べることを眼目として構成されたもので、前に報告されたものの続論的、補足的な意味を持つものである。

この報告を通して X を実バナッハ空間、その位相的共役を X^* とし、B(X) は X の閉単位球、S(X) は X の単位球面とする。(I, Λ, λ) は I $(=[0, 1])$ 上のルベーグ測度空間とし、$\Lambda^+ = \{ A \in \Lambda : \lambda(A) > 0 \}$ であり、$L_1 = L_1(I, \Lambda, \lambda)$ とする。我々は以後、I 上には Λ と λ が備わっているものと考える。$f : I \to X^*$ が弱*可測であるとは各 $x \in X$ について $(x, f(t))$ が λ に関して可測であることをいう。有界な値域を持つ弱*可測関数 $f : I \to X^*$ が与えられた時、我々は $T_f(x) = x \circ f$ $(x \in X)$ により定義される有界線形写像 $T_f : X \to L_1$ を持つ。その時、この共役作用素を $T_f{}^*$ $(: L_\infty \to X^*)$ と表せば、$T_f{}^*$ は有界線形写像 $S_f : L_1 \to X^*$ に唯一通りに拡張される。

次に、X の有界閉凸集合 C が弱ラドン-ニコディム集合 (resp.ラドン-ニコディム集合) であるとは「任意の有界線形写像 $T : L_1 \to X$ s.t. $T(\Delta_I) \subset C$ (但し、$\Delta_I = \{\chi_A / \lambda(A) : A \in \Lambda^+\}$) が C に値を持つペッティス核 (resp. ボッフォナー核) により表示される」ことをいう。特に、B(X) がラドン-ニコディム集合である時、X はラドン-ニコディム性を持つという。又、コンパクトハウスドルフ空間 K に対して、$f : K \to X^*$ が universally scalarly measurable であるとは「各 $x^{**} \in X^{**}$ について、実数値関数 $(f(k), x^{**})$ が K 上の任意のラドン測度 μ に関して μ-可測である」ことをいう。

さて、X^* の弱*コンパクト凸集合の弱ラドン-ニコディム性 (即ち、弱ラドン-ニコディム集合, weak Radon-Nikodym set) の一般概念として、M. Talagrand[9] により凸性のない弱*コンパクト集合に関して次の概念が定義されている。以後 X^* の弱*コンパクト集合上には、弱*位相 $\sigma(X^*, X)$ が備わっているものと考える。

定義 1. X^* の弱*コンパクト集合 H が Pettis set であるとは、恒等写像 $i : H \to X^*$ が universally scalarly measurable である時をいう。

その時、L.H. Riddle and E. Saab[7] や M. Talagrand[9] により与えられた次の特徴付け : H が Pettis set $\Leftrightarrow$ H の弱*閉凸包が weak Radon-Nikodym set $\Leftrightarrow$ B(X) の任

意の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ は H 上の各点で収束する部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k\geq 1}$ を持つ、を注意しよう。その他の種々の Pettis sets の特徴付けに関しては、例えば [2], [3], [4], [5] 等を参照すると良い。

更に、 X が complete continuity property (CCP) を持つとは「任意の有界線形写像 $T: L_1 \to X$ が Dunford-Pettis operator である (即ち、任意の弱収束列をノルム収束列に写す)」ことをいう。ここで良く知られている事実: ラドン-ニコディム性を持つバナッハ空間は CCP を持つが逆は必ずしも不成立、を注意しておこう。又、この概念を局所化したものとして次が定義される: X の有界閉凸集合 C が CCP を持つとは「任意の有界線形写像 $T: L_1 \to X$ s.t. $T(\Delta_I) \subset C$ が Dunford-Pettis operator である」ことをいう。

さて、M. Girardi[1] は、(従来知られているように) X の有界集合の幾何的性質 "dentability" が X のラドン-ニコディム性を規定していることを踏まえ、それより真に弱い、 X のこの性質 CCP は果たしてどんな幾何的性質により規定されるかを考えた。そのために彼女は例えば "Bocce-dentability" や "midpoint-Bocce-dentability" という、従来の "dentability" を弱めた幾何的概念を定義し、このような型の dentability や tree property を用いて CCP を持つ有界閉凸集合の多くの特徴付けを与えた。即ち、その一部を挙げれば次である。

定理 A. X の有界閉凸集合 C について次の各陳述は同値である。
(a) C は CCP を持つ。
(b) C の任意の部分集合は midpoint-Bocce-dentableである。
(c) C は δ-Rademacher tree を含まない。

ところで、我々は論文 [2] において Pettis sets の "δ-Rademacher tree" による特徴付けを与えている。即ち、次である。

定理 B. X^* の弱*コンパクト集合 H について、H が Pettis set であるための必要十分条件は、$\forall f: I \to H$, 弱*可測関数について、$T_f^*(\Delta_I)$ が δ-Rademacher tree を含まないことである。

更に、M. Talagrand[9] による結果: H が Pettis set であるための必要十分条件は、$\forall f: I \to H$, 弱*可測関数について、$\{ T_f^*(\chi_A) : A \in \Lambda \}$ が 相対ノルムーコンパクト (即ち、$S_f: L_1 \to X^*$ が Dunford-Pettis operator) である、を思い起こそう。 その時、この結果や定理 A、B を総合することから示唆されることであるが、「問題 : Pettis sets がどのようなタイプの midpoint-Bocce-dentability によってどのように特徴付けられ得るか」を考えることは当然のことであろう。本報告では、この問題に関して

得られた結果を紹介したい。

そのために我々は“dentability”を弱めた一つの幾何的概念（weak*-midpoint-Bocce-dentability）を、以下の 定義 2 のように定める。それは、Girardi により定義された“midpoint-Bocce-dentability”の弱*版に相当しており、midpoint-Bocce-dentability より弱い概念である。実際、定義 2 において $S(X)$ を $S(X^{**})$ で置き換えることにより X^* の部分集合に関する“midpoint-Bocce-dentability”の概念が得られる。

定義 2. 共役空間 X^* の部分集合 D が weak*-midpoint-Bocce-dentable である ⇔ 任意の正数 ε に対して、次の性質 (*) を満たす D の有限部分集合 F が存在する。

(*) 各 $x \in S(X)$ について F の元 x^* が存在し、$x^* = (z_1^* + z_2^*)/2$ $(z_1^*, z_2^* \in D)$ であるならば $|(x, x^* - z_1^*)| \equiv |(x, x^* - z_2^*)| < \varepsilon$ が成立。

（注）これは次のように言いなおせる。各 $x \in S(X)$, $x^* \in X^*$, 正数 ε に対して $U_x(x^*, \varepsilon) = \{ z^* \in X^* : |(x, x^* - z^*)| < \varepsilon \}$ と置き、$A\ (\subset X^*)$ について

$$\text{midpoint-co}(A) = \{ (a^* + b^*)/2 : a^*, b^* \in A \}$$

とすれば、「D が weak*-midpoint-Bocce-dentable である ⇔ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F$: finite subset of D satisfying that $\forall x \in S(X)$, $\exists x^* \in F$ s.t. $x^* \notin \text{midpoint-co}(D \setminus U_x(x^*, \varepsilon))$」である。

その時、この幾何的性質を用いることにより、先の問題に関して Pettis sets が次のように特徴付けられることがわかる。

定理. X^* の弱*コンパクト集合 H について、 H が Pettis set であるための必要十分条件は、$\forall f : I \to H$, 弱*可測関数について、 $T_f^*(\Delta_I)$ の全ての部分集合 D が weak*-midpoint-Bocce-dentable となることである。

この定理について我々が強調すべき重要な点は（前の報告集におけると同様に）、H が non-Pettis set である時、[2] で構成された弱*可測関数 $h : I \to H$ が次の性質を持った関数であることが示されることである。

『 $T_h^*(\Delta_I)$ は weak*-midpoint-Bocce-dentable ではない部分集合 D を含む。』

即ち、 $T_h^*(\Delta_I)$ の中にこのような部分集合 D をうまく作り出すことができる。

§2. 定理の必要性の証明. 先ず、そのために必要な概念を用意しよう。 X の系 $\{x(n,k) : n = 0, 1, \cdots ; k = 1, \cdots, 2^n\}$ が tree であるとは、各 $n = 1, 2, \cdots$ と各 $k = 1, \cdots, 2^{n-1}$ について

$$x(n-1,k) = \{x(n,2k-1) + x(n,2k)\}/2$$

が満たされる時をいう。 X の tree $\{x(n,k) : n = 0, 1, \cdots ; k = 1, \cdots, 2^n\}$ が δ-Rademacher tree であるとは

$$\|x(0,1)\| \geqq \delta$$

であり、かつ、各自然数 n について

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (x(n,2k-1) - x(n,2k)) \right\| \geqq 2^n \delta$$

が満たされる時をいう。又、X^* の tree $\{x^*(n,k) : n = 0, 1, \cdots ; k = 1, \cdots, 2^n\}$ が weak*-separated δ-tree であるとは、S(X) の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ を適当にとれば、各 $n = 1, 2, \cdots$ と $k = 1, \cdots, 2^{n-1}$ について

$$(x_n,\ x^*(n,2k-1) - x^*(n,2k)) \geqq 2\delta$$

が満たされる時をいう。この時、tree は 点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ によって separate されているという。

さて、定理の必要性の証明を与えよう。今、H が Pettis set であり、しかも弱*可測関数 $f : I \to H$ で $T_f^*(\Delta_I)$ が weak*-midpoint-Bocce-dentable ではない部分集合 D を含むとしよう。その時、そのような集合 D の中に、適当な正数 η をとることにより weak*-separated η-tree が作れることを示そう。即ち、

補題 1. weak*-midpoint-Bocce-dentable ではない部分集合 D は、適当な正数 η に対して weak*-separated η-tree を含む。

証明. これは、[1] の定理 3.2 と同様の議論により示される。 D の性質から、前述(注) を用いることで、適当な正数 η をとれば、D の任意の有限部分集合 F について $x(F) \in S(X)$ が存在し、$x^* \in \text{midpoint-co}(D \setminus U_{x(F)}(x^*, 2\eta))$ $(\forall x^* \in F)$ が成立することがわかる。即ち、適当な正数 η に対して次が成立。

「 D の任意の有限部分集合 F について $x(F) \in S(X)$ が存在し，F の任意の元 x^* は $x^* = (x_1^* + x_2^*)/2$ (但し、 $|(x(F),\ x_1^* - x_2^*)| \geqq 2\eta$, x_1^*, $x_2^* \in D$) と表せる。」

先ず、D は weak*-midpoint-Bocce-dentable ではないから、D は non-zero な元 $x^*(0,1)$ を持つ。そして $F = \{x^*(0,1)\}$ に関して「 … 」を応用せよ。その時得られる $x(F)$ を x_1 とすれば、「 … 」の故に、D の中に次を満たす元 $x^*(1,1)$, $x^*(1,2)$ が存在する。

$$x^*(0,1) = \{\ x^*(1,1) + x^*(1,2)\ \}/2, \qquad |(x_1,\ x^*(1,1) - x^*(1,2))| \geqq 2\eta.$$

必要ならば $x^*(1,1)$, $x^*(1,2)$ を入れ替えることによって

$$(x_1,\ x^*(1,1) - x^*(1,2)) \geqq 2\eta$$

と仮定して良い。次に $F = \{x^*(1,1),\ x^*(1,2)\}$ に関して「 … 」を応用せよ。その時得られる $x(F)$ を x_2 とすれば、前述と同じ議論により、各 $k = 1,\ 2$ について D の中に次を満たす元 $x^*(2,2k-1)$, $x^*(2,2k)$ が存在する。

$$x^*(1,k) = \{\ x^*(2,2k-1) + x^*(2,2k)\ \}/2,$$

$$|(x_2,\ x^*(2,2k-1) - x^*(2,2k))| \geqq 2\eta.$$

必要ならば $x^*(2,2k-1)$, $x^*(2,2k)$ を入れ替えることによって

$$(x_2,\ x^*(2,2k-1) - x^*(2,2k)) \geqq 2\eta$$

として良い。この議論を繰り返し続けることにより、我々が D の元からなる weak*-separated η-tree $\{\ x^*(n,k) : n = 0,\ 1,\ \cdots ;\ k = 1,\ \cdots,\ 2^n\ \}$ で、点列 $\{x_n\}_{n\geq1}$ により separate されているものを持つことは容易である。これで 補題 1 が示された。

定理の必要性の証明を完結するために、D (従って、$T_f^*(\Delta_I)$) が適当な正数 δ に対し δ-Rademacher tree を含むことを注意しよう。今、$\{\ x^*(n,k) : n = 0,\ 1,\ \cdots ;\ k = 1,\ \cdots,\ 2^n\ \}$ を 補題 1 で得られた weak*-separated η-tree (但し、点列 $\{x_n\}_{n\geq1}$ で separateされている) とせよ。その時、$\delta = \min\{\|x^*(0,1)\|,\ \eta\}$ (> 0) とおけば

$$\|x^*(0,1)\| \geqq \delta$$

であり、かつ、自然数 n について

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (x^*(n,2k-1) - x^*(n,2k)) \right\|$$

$$\geqq |(x_n, \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (x^*(n,2k-1) - x^*(n,2k))|$$

$$= |\sum_{k=1}^{2^{n-1}} (x_n,\ x^*(n,2k-1) - x^*(n,2k))|$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (2\eta) = 2^n \eta \geqq 2^n \delta.$$

このことは、$\{ x^*(n,k) : n = 0, 1, \cdots ; k = 1, \cdots , 2^n \}$ が δ-Rademacher tree であることを意味する。それ故、$T_f{}^*(\Delta_I)$ が δ-Rademacher tree を含むことになり、前述の 定理 B に矛盾する。従って、定理の必要性の証明は完結した。

§3. 定理の十分性の証明. X^* の弱*コンパクト集合 H が non-Pettis set であるとしよう。その時、我々は「$T_h{}^*(\Delta_I)$ が non-weak*-midpoint-Bocce-dentable な集合 D を含むような弱*可測関数 $h : I \to H$ の存在」を示そう。そのような関数 h の詳細な構成については [2] を参照すべきであるが、その関数の重要性、必要性の故に、ここでも構成の概略を述べることにしよう。一般に、コンパクトハウスドルフ空間 K について K の互いに素な集合の対の列 $(A_n, B_n)_{n\geq 1}$ が independent であるとは、$\forall k \geqq 1$ と $\forall\{\varepsilon_j\}_{1\leq j\leq k}$ ($\varepsilon_j = 1$ or -1, $1 \leqq j \leqq k$) について $\cap \{\varepsilon_j A_j : 1 \leqq j \leqq k\} \neq \phi$ (但し、$\varepsilon_j A_j = A_j$ if $\varepsilon_j = 1$, $\varepsilon_j A_j = B_j$ if $\varepsilon_j = -1$) であることをいう。今、H が non-Pettis set であるから、§1 の定義 1 の後で述べた Pettis sets の特徴付けについての注意より、「$\exists\{x_n\}_{n\geq 1} \subset B(X)$ s.t. $\{x_n\}_{n\geq 1}$ の任意の部分列は H 上で各点収束列ではない」、を得る。このことに Rosenthal[8] の議論を利用すれば、$\exists\{x_{n(m)}\}_{m\geq 1}$ (: a subsequence of $\{x_n\}_{n\geq 1}$), $\exists$ r (: a real number) and $\exists\delta(>0)$ s.t. $A_m = \{ x^* \in H : (x^*, x_{n(m)}) \leqq r \}$, $B_m = \{ x^* \in H : (x^*, x_{n(m)}) \geqq r + 2\delta\}$ について $(A_m, B_m)_{m\geq 1}$ は H の閉集合からなる independent sequence である。従って、この互いに素な閉集合 の対の列で independent なもの $(A_m, B_m)_{m\geq 1}$ に対して、$\Gamma = \cap_{m\geq 1}(A_m \cup B_m)$ とおくことによって、我々は H の空でないコンパクト部分集合 Γ を得る。その時、$\phi : \Gamma \to \Delta$ ($= \{0, 1\}^N$, Cantor space) を $\phi(z) = \{s_m\}_{m\geq 1}$ (但し、$s_m = 1$ if $z \in A_m$, $s_m = 0$ if $z \in B_m$) により定義すれば、ϕ は連続全射であり、$\Gamma \cap A_m = \phi^{-1}(U_m)$, $\Gamma \cap B_m = \phi^{-1}(U_m{}^c)$ (但し、$U_m = \{ \{s_k\}_{k\geq 1} \in \Delta : s_m = 1 \}$, $m \geqq 1$) を満たす。ϕが連続全射であることから、Talagrand の結果 (1-2-5 in [9]) を用いることで、Γ 上 の Radon probability measure γ で $\phi(\gamma)$ (γ の ϕ による像

測度) = ν (Δ上の正規化されたハール測度) かつ $\{ f\circ\phi : f \in L_1(\Delta, \Sigma_\nu, \nu) \} = L_1(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ (ここで、Σ_ν, Σ_γ は各々 ν, γ に関して可測な集合全体を表す) を満たすものを得る。更に、$\tau : \Delta \to I$ を $\tau(s) = \Sigma_{m\geq 1}\, s_m/2^m$ (但し、$s = \{s_m\}_{m\geq 1} \in \Delta$) で定義すれば、$\tau$ は $\tau(\nu) = \lambda$ かつ $\{ u\circ\tau : u \in L_1(I, \Lambda, \lambda) \} = L_1(\Delta, \Sigma_\nu, \nu)$ を満たす連続全射である。

この時、これらの性質と lifting theory を利用することにより、我々は次の等式 (E) を満たす弱*可測関数 $h : I \to H$ を構成する事ができた。

$$(E) \quad \int_A (x, h(t))d\lambda(t) = \int_{\phi^{-1}(\tau^{-1}(A))} (x^*, x)d\gamma(x^*)$$

が各 $A \in \Lambda$ と各 $x \in X$ について成り立つ。この等式 (E) が重要である。

次に $\{ I(m,k) : m = 0, 1, \cdots ; k = 1, \cdots, 2^m \}$ を $I(m,k) = [(k-1)/2^m, k/2^m)$ (但し、$m \geq 1$, $1 \leq k \leq 2^m - 1$), $I(m,2^m) = [(2^m - 1)/2, 1]$ $(m \geq 0)$ により定義される I の区間の集合とする。その時、 前述から 『$\lambda = \tau(\nu) = \tau(\phi(\gamma))$ であり、$\phi^{-1}(\tau^{-1}(I(m,2k-1))) \subset B_m$, $\phi^{-1}(\tau^{-1}(I(m,2k))) \subset A_m$ $(m \geq 1, 1 \leq k \leq 2^{m-1})$』が成り立つことを注意する。

さて、この弱*可測関数 $h : I \to H$ が要求された性質、即ち「$T_h^*(\Delta_I)$ が non-weak*-midpoint-Bocce-dentable な集合 D を含む」を示すために我々は先ず次のことを注意しよう。この結果は [2] の定理 1 の証明の中で暗に得られているものである。

補題 2. 前述で得られた弱*可測関数 h について、$\{ T_h^*(\chi_{I(m,k)}/\lambda(I(m,k))) : m = 0, 1, \cdots ; k = 1, \cdots, 2^m \}$ は weak*-separeted δ-tree である。

証明. $T_h^*(\chi_{I(m,k)}/\lambda(I(m,k))) = x^*(m,k)$ と置く。その時、$m = 1, 2, \cdots$ と $k = 1, \cdots, 2^{m-1}$ に対して

$$\begin{aligned} & x^*(m,2k-1) + x^*(m,2k) \\ &= T_h^*(\chi_{I(m,2k-1)}/\lambda(I(m,2k-1))) + T_h^*(\chi_{I(m,2k)}/\lambda(I(m,2k))) \\ &= 2\cdot\{ T_h^*(\chi_{I(m,2k-1)}/\lambda(I(m-1,k))) + T_h^*(\chi_{I(m,2k)}/\lambda(I(m-1,k))) \} \\ &= 2\cdot T_h^*(\chi_{I(m-1,k)}/\lambda(I(m-1,k))) = 2\cdot x^*(m-1,k) \end{aligned}$$

が成り立ち、$\{ x^*(m,k) : m = 0, 1, \cdots ; k = 1, \cdots , 2^m \}$ が tree であることが得られる。更に、それが weak*-separeted δ-tree であることを示すために、関数 h の構成の際に用いられている B(X) の点列 $\{x_{n(m)}\}_{m\geq 1}$ (: $\{x_n\}_{n\geq 1}$ の部分列) をとろう。その時、$m = 1, 2, \cdots$ と $k = 1, \cdots , 2^{m-1}$ に対して

$$(x_{n(m)}, x^*(m,2k-1) - x^*(m,2k))$$

$$= (x_{n(m)}, T_h^*(\chi_{I(m,2k-1)} / \lambda(I(m,2k-1))) - T_h^*(\chi_{I(m,2k)} / \lambda(I(m,2k)))$$

$$= 2^m \cdot (x_{n(m)}, T_h^*(\chi_{I(m,2k-1)}) - T_h^*(\chi_{I(m,2k)}))$$

$$= 2^m \cdot (T_h(x_{n(m)}), \chi_{I(m,2k-1)} - \chi_{I(m,2k)})$$

$$= 2^m \cdot \{ \int_{I(m,2k-1)} (x_{n(m)}, h(t))d\lambda(t) - \int_{I(m,2k)} (x_{n(m)}, h(t))d\lambda(t) \}$$

$$= 2^m \cdot \{ \int_{\phi^{-1}(\tau^{-1}(I(m,2k-1)))} (x_{n(m)}, x^*)d\gamma(x^*)$$

$$- \int_{\phi^{-1}(\tau^{-1}(I(m,2k)))} (x_{n(m)}, x^*)d\gamma(x^*) \} \quad \text{(等式 (E) より)}$$

$$\geqq (r + 2\delta) - r = 2\delta \quad \text{(前述の注意事項『…』より)}$$

が成り立つ。よって、$x_{n(m)} \neq 0$ $(m \geqq 1)$ であるから $z_m = x_{n(m)} / \| x_{n(m)} \|$ と置くことにより、$m = 1, 2, \cdots$ と $k = 1, \cdots , 2^{m-1}$ に対して

$$(z_m, x^*(m,2k-1) - x^*(m,2k))$$

$$= (1 / \| x_{n(m)} \|)(x_{n(m)}, x^*(m,2k-1) - x^*(m,2k))$$

$$\geqq 2\delta \quad (\because \| x_{n(m)} \| \leqq 1)$$

が得られ、補題 2 の証明が完結した。

次に、「一つの weak*-separated δ-tree から、我々は non-weak*-midpoint-Boccedentable 集合を作り挙げることができる」ことを記述している結果を与えよう。この結

果はそれ自身としてもおもしろいと考える。

補題 3. $\{ x^*(n,k) : n = 0, 1, \cdots ; k = 1, \cdots, 2^n \}$ を weak*-separated δ-tree とし、各 $n = 0, 1, \cdots$ に対して

$$D_n = \{ (\sum_{k\in E} x^*(n,k))／\| E \| : E \subset \{1, 2, \cdots, 2^n\}, E \neq \phi \}$$

とする。但し、$\| E \|$ は E の元の個数を表す。その時、集合 $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ は non-weak*-midpoint-Bocce-dentable である。

証明. $\{ x^*(n,k) : n = 0, 1, \cdots ; k = 1, \cdots, 2^n \}$ は weak*-separated δ-tree であるから、S(X) の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ で、各 $n = 1, 2, \cdots$ と $k = 1, \cdots, 2^{n-1}$ について

$$(x_n, x^*(n,2k-1) - x^*(n,2k)) \geqq 2\delta$$

を満たすものが存在する。さて、集合 D が non-weak*-midpoint-Bocce-dentable であることを示すべく、D の任意の有限部分集合 F をとり、$F = \{ z_1^*, \cdots, z_p^* \}$ とする。その時、非負整数の有限集合 $\{ n(1), \cdots, n(p) \}$ が存在して $z_i^* \in D_{n(i)}$ $(i = 1, \cdots, p)$ となる。適当に番号を付け替えることで、$\max(n(1), \cdots, n(p)) = n(p)$ と仮定して良い。補題 3 の証明を完結させるために、我々は S(X) の元 $x_{n(p)+1}$ が次の性質 (α) を持つことを示せば十分である。

(α) 各 $i = 1, \cdots, p$ に対して、D の元 u_i^*, v_i^* で $z_i^* = (u_i^* + v_i^*)/2$ かつ $(x_{n(p)+1}, u_i^* - v_i^*) \geqq 2\delta$ を満たすものが存在する。

実際、性質 (α) から次の性質 (β) が容易に得られるから、有限集合 F に対応して定まる S(X) の元が $x_{n(p)+1}$ であることになり、結局、集合 D は non-weak*-midpoint-Bocce-dentable であることがわかる。

(β) 各 $i = 1, \cdots, p$ に対して、D の元 u_i^*, v_i^* で $z_i^* = (u_i^* + v_i^*)/2$, $|(x_{n(p)+1}, z_i^* - u_i^*)| \equiv |(x_{n(p)+1}, z_i^* - v_i^*)| \geqq \delta$ を満たすものが存在する。

さて、性質 (α) を以下で示そう。先ず、$z_i^* \in D_{n(i)}$ であることから、適当に E_i $(\subset \{1, 2, \cdots, 2^{n(i)}\})$ をとれば、

$$z_i{}^* = (\sum_{k \in E_i} x^*(n(i),k)) / \| E_i \|$$

である。各 $i = 1, \cdots, p$ に対して、自然数 $n(p) + 1 - n(i) = q(i)$ と置こう。その時、tree property を利用することで、各 $k \in E_i$ に対して

$$x^*(n(i),k))$$

$$= \{ x^*(n(i)+1,2k-1)) + x^*(n(i)+1,2k)) \} / 2$$

$$= \{ x^*(n(i)+2,4k-3)) + x^*(n(i)+2,4k-2))$$

$$+ x^*(n(i)+2,4k-1)) + x^*(n(i)+2,4k)) \} / 2^2$$

$$= \cdots\cdots\cdots$$

$$= \{ x^*(n(i)+q(i),2^{q(i)} \cdot (k-1)+1) + x^*(n(i)+q(i),2^{q(i)} \cdot (k-1)+2) + \cdots$$

$$+ \cdots + x^*(n(i)+q(i),2^{q(i)} \cdot k+1) + x^*(n(i)+q(i),2^{q(i)} \cdot k) \} / 2^{q(i)}$$

$$= (1/2^{q(i)}) \cdot \sum \{ x^*(n(p)+1,j) : 2^{q(i)} \cdot (k-1)+1 \leqq j \leqq 2^{q(i)} \cdot k \}$$

が得られる。それ故、

$$z_i{}^* = (1/2^{q(i)} \cdot \| E_i \|) \sum_{k \in E_i} (\sum \{ x^*(n(p)+1,j) : 2^{q(i)} \cdot (k-1)+1 \leqq j \leqq 2^{q(i)} \cdot k \})$$

である。従って、

$$u_i{}^*$$

$$= (1/2^{q(i)-1} \cdot \| E_i \|) \sum_{k \in E_i} (\sum \{ x^*(n(p)+1,2j-1) :$$

$$2^{q(i)-1} \cdot (k-1)+1 \leqq j \leqq 2^{q(i)-1} \cdot k \}),$$

$$v_i{}^*$$

$$= (1/2^{q(i)-1} \cdot \| E_i \|) \sum_{k \in E_i} (\sum \{ x^*(n(p)+1,2j) :$$

$$2^{q(i)-1} \cdot (k-1)+1 \leqq j \leqq 2^{q(i)-1} \cdot k \})$$

とすれば、容易に $z_i^* = (u_i^* + v_i^*)/2$ が得られ、更に u_i^*, v_i^* が共に $D_{n(p)+1}$ ($\subset D$) の元であることがわかる。実際、

$$A_i = \bigcup_{k\in E_i}\{\, 2j-1 : 2^{q(i)-1}\cdot(k-1)+1 \leqq j \leqq 2^{q(i)-1}\cdot k \,\},$$
$$B_i = \bigcup_{k\in E_i}\{\, 2j : 2^{q(i)-1}\cdot(k-1)+1 \leqq j \leqq 2^{q(i)-1}\cdot k \,\}$$

とすれば

$$A_i,\ B_i \subset \{1,\ 2,\ \cdots,\ 2^{n(p)+1}\},\quad \|A_i\| = \|B_i\| = 2^{q(i)-1}\cdot\|E_i\|$$

である。それ故、

$$u_i^* = \Big(\sum_{k\in A_i} x^*(n(p)+1,k)\Big)/\|A_i\|,\qquad v_i^* = \Big(\sum_{k\in B_i} x^*(n(p)+1,k)\Big)/\|B_i\|$$

となり、これらは $D_{n(p)+1}$ の元であることがわかる。最後に、各 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ p$ に対して、

$$\begin{aligned}
&(x_{n(p)+1},\ u_i^* - v_i^*)\\
&= (1/2^{q(i)-1}\cdot\|E_i\|)\sum_{k\in E_i}\Big(\sum\{\,(x_{n(p)+1},\ x^*(n(p)+1,2j-1) - x^*(n(p)+1,2j)) :\\
&\qquad\qquad 2^{q(i)-1}\cdot(k-1)+1 \leqq j \leqq 2^{q(i)-1}\cdot k\,\}\Big)\\
&\geqq (1/2^{q(i)-1}\cdot\|E_i\|)\sum_{k\in E_i}\Big(\sum\{\,2\delta : 2^{q(i)-1}\cdot(k-1)+1 \leqq j \leqq 2^{q(i)-1}\cdot k\,\}\Big)\\
&= 2\delta
\end{aligned}$$

が得られ、性質 (α) が示された。よって、補題 3 の証明は完結した。

定理の十分性の証明を完結させるべく、先に構成された弱*可測関数 $h : I \to H$ について、$T_h^*(\Delta_I)$ が non-weak*-midpoint-Bocce-dentable な部分集合 D を含むことを示そう。

そのために、Λ_m ($m = 0,\ 1,\ \cdots$) を $\{I(m,k) : k = 1,\ \cdots,\ 2^m\}$ によって生成される σ-algebra とし

$$D_m = \{ T_h{}^*(\chi_A / \lambda(A)) : A \in \Lambda_m,\ \lambda(A) > 0 \}$$

とする。そして $\{ x^*(m,k) : m = 0, 1, \cdots ; k = 1, \cdots, 2^m \}$ は 補題 2 で得られた weak*-separated δ-tree とする。その時

$$D_m = \{ (\sum_{k \in E} x^*(m,k)) / \| E \| : E \subset \{1, 2, \cdots, 2^m\},\ E \neq \phi \}$$

が成り立つ。実際、$\lambda(A) > 0$ なる $A \in \Lambda_m$ をとれば、適当な $E \subset \{1, 2, \cdots, 2^m\}$ $(E \neq \phi)$ について $A = \sum_{k \in E} I(m,k)$ と表現できる。それ故、

$$T_h{}^*(\chi_A / \lambda(A)) = \sum_{k \in E} (\lambda(I(m,k)) / \lambda(A)) \cdot (T_h{}^*(\chi_{I(m,k)} / \lambda(I(m,k)))$$

$$= (\sum_{k \in E} x^*(m,k)) / \| E \|$$

である。従って、D_m は上記の集合となり、補意 3 から集合 $D = \bigcup_{m=0}^{\infty} D_m$ $(\subset T_h{}^*(\Delta_I))$ は non-weak*-midpoint-Bocce-dentable である。即ち、定理の十分性の証明が完結された。

参考文献

[1] M. Girardi, Dentability, trees and Dunford-Pettis operators on L_1, Pacific J. Math., 148 (1991), 59-79.

[2] M. Matsuda, A characterization of Pettis sets in dual Banach spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 27 (1991), 827-836.

[3] M. Matsuda, A characterization of non-Pettis sets in terms of martingales, Math. Japon., 38 (1993), 177-183.

[4] M. Matsuda, Remarks on Pettis sets, Rep. Fac. Sci. Shizuoka Univ., 28 (1994), 17-23.

[5] M. Matsuda, A characterization of Pettis sets in terms of the Bourgain property, Math. Japon., 41 (1995), 433-439.

[6] M. Matsuda, Weak*-midpoint-Bocce-dentability and Pettis sets, preprint.

[7] L.H. Riddle and E. Saab, On functions that are universally Pettis integrable, Illinois J. Math., 29 (1985), 509-531.

[8] H. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing l_1, Proc. Nat. Acad. Sci., 71 (1974), 2411-2413.

[9] M. Talagrand, Pettis integral and measure theory, Mem. Amer. Math. Soc., 307, Providence (1984).